

---

## Глава 2

### Распространение волновых пакетов в однородном полупространстве с частотной дисперсией

---

#### § 1. Введение

Получим точные выражения для некоторых интегральных характеристик волновых пакетов, распространяющихся в однородном полупространстве и описываемых уравнением Клейна–Гордона.

Покажем, что определенные структуры волновых пакетов приводят к изменению направления их распространения (к поперечному сдвигу) из-за дисперсионных или дифракционных эффектов.

Для этого решим задачу с граничными условиями в полупространстве  $x \geq 0$  в декартовых координатах  $x, y, t$ , где  $x$  – продольная координата,  $y$  – поперечная координата,  $t$  – время.

В общем случае волновое поле в двух- или трехмерной среде описывается волновой функцией трех или четырех переменных (две или три пространственные координаты и время). Для упрощения описания волнового пакета как единого целого или отдельных его участков вводят интегральные характеристики поля, связанные с движением волновой энергии в пространстве. Обычно это вектор групповой скорости, траектория движения центра энергии, длина и ширина волнового пакета.

В наиболее общем виде вектор групповой скорости  $\mathbf{V}_g$  вводится как отношение среднего (за период осцилляции  $T$ ) вектора плотности потока энергии  $\mathbf{P}$  к средней за тот же период плотности энергии  $W$ :

$$\mathbf{V}_g = \frac{\int_0^T \mathbf{P} dt}{\int_0^T W dt}. \quad (2.1)$$

Физически вектор групповой скорости задает среднее направление и скорость распространения энергии в некоторой точке пространства. Такое определение имеет смысл только тогда, когда изменения параметров волны достаточно медленны, т.е. когда волна ведет себя локально почти как плоская и монохроматическая. В этом случае вектор групповой скорости действительно описывает движение волновой энергии участков волнового пакета на большие расстояния, что является основой пространственно-временной геометрической оптики [11, 38, 47].

Другой вариант интегрального описания волнового пакета используется в методе моментов, когда вводятся характеристики распределения энергии в пространстве. Чаще всего используются первый и второй моменты, обычно называемые энергетическим центром, длиной и шириной волнового пакета [19–21].

Первые моменты, определяющие энергетический центр пакета, задаются следующими выражениями:

$$X_c(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wx dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dx dy}; \quad (2.2a)$$

$$Y_c(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wy dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dx dy}. \quad (2.2b)$$

Их зависимость от времени отражает среднее движение волнового пакета.

Вторые моменты, длина  $\sigma_x$  и ширина  $\sigma_y$  пакета определяются как

$$\sigma_x^2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wx^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dx dy} - X_c^2; \quad (2.3a)$$

$$\sigma_y^2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W y^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dx dy} - Y_c^2 \quad (2.3b)$$

и показывают изменение формы пакета.

В рамках поставленной задачи ни один из двух методов не может быть использован в чистом виде. Вектор групповой скорости не подходит по той причине, что мы не собираемся накладывать никаких ограничений на параметры волнового пакета, в том числе и условие квазимонохроматичности. Метод моментов (2.2a), (2.3b) не может быть использован, поскольку интегрирование по  $x$  осредняет волновое поле по продольной координате и не дает точного представления о влиянии граничных условий на эволюцию пакета в зависимости от расстояния до границы.

Одной из возможных модификаций метода моментов может быть отказ от интегрирования по  $x$  в (2.2) и (2.3). В результате мы получим функции двух переменных, описывающую центрированную по  $y$  волну в зависимости от  $x$  и  $t$ . Однако этот путь уводит нас от представления волнового пакета как единого целого (т.е. как квазичастицы) и не приводит к четкому ответу на вопрос об эволюции пакета в зависимости от расстояния до границы. Такой ответ может дать только функция одной переменной  $x$ .

Исходя из этих причин, ниже мы модифицируем эти два метода, чтобы избежать перечисленных сложностей и решить задачу в общем виде.

## § 2. Интегральные характеристики переноса энергии

Определим вектор средней групповой скорости  $V_{ga}(x)$  как

$$V_{ga} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P dy dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dy dt}. \quad (2.4)$$

Вектор  $V_{ga}(x)$  вычисляется осреднением волновой энергии по осям  $y$  и  $t$ , следовательно, определяет среднее направление и

скорость всего волнового пакета в зависимости от продольной координаты  $x$ .

Чтобы избежать трудностей, присущих методу моментов, модифицируем формулы (2.2a), (2.2b) и (2.3a), (2.3b), заменяя интегрирование по оси  $x$  интегрированием по переменной  $t$ .

Определим поперечную координату энергетического центра  $Y_{ca}(x)$  (которую в дальнейшем для простоты будем называть "поперечная координата пакета") следующим образом:

$$Y_{ca} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W y dy dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dy dt}. \quad (2.5)$$

Аналогично определим время распространения энергетического центра  $T_{ca}(x)$  (далее – время распространения пакета):

$$T_{ca} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W t dy dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dy dt}, \quad (2.6)$$

ширину пакета  $\sigma_{ya}(x)$ :

$$\sigma_{ya}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W y^2 dy dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dy dt} - Y_{ca}^2 \quad (2.7)$$

и его длительность  $\sigma_{ta}(x)$ :

$$\sigma_{ta}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W t^2 dy dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W dy dt} - T_{ca}^2. \quad (2.8)$$

Интегральные характеристики поля (2.5)–(2.8) адаптируют метод моментов к поставленной нами задаче и позволяют проследить эволюцию пакета вдоль оси  $x$ . Как и в обычном методе моментов, мы рассматриваем пакет как квазичастицу, характеризуемую поперечной координатой  $Y_{ca}(x)$  и временем

распространения  $T_{ca}(x)$ . Это прямая аналогия с обычной параметризацией  $X_c(t)$ ,  $Y_c(t)$ , но в нашем случае независимая переменная  $t$  заменена на  $x$ .

Подобная аналогия прослеживается между  $\sigma_y$  (2.3b) и  $\sigma_{ya}$  (2.7). Оба параметра имеют один и тот же физический смысл – они характеризуют ширину волнового пакета.

Есть некоторые сложности с продольным размером пакета  $\sigma_x$  (2.3a). Этот параметр вообще не может быть определен при выбранном способе интегрирования. Зато мы можем определить длительность пакета  $\sigma_{ta}$  (2.8), что невозможно в обычном методе, и связать продольный размер пакета и его длительность через среднюю групповую скорость  $V_{ga}$ , определенную в (2.4).

Далее мы рассчитаем характеристики (2.4)–(2.8) как функционалы от начального волнового поля на границе  $x = 0$ .

### § 3. Постановка задачи

Пусть волновой пакет распространяется в полуплоскости  $x \geq 0$  двумерного пространства  $(x, y)$ . На границе  $x = 0$  волновое поле задается действительной функцией  $U(0, y, t)$ , которая определена на всей оси  $y$  и  $t$ .

Представим начальную функцию при  $x = 0$ , используя двумерное интегральное преобразование Фурье [10, 103]:

$$U(0, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(k_y, \omega) \exp\{i(k_y y - \omega t)\} dk_y d\omega,$$

где

$$F_0(k_y, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(0, y, t) \exp\{-i(k_y y - \omega t)\} dy dt. \quad (2.9)$$

Спектральную компоненту  $F_0 \exp\{i(k_y y - \omega t)\}$  можно рассматривать как проекцию плоской монохроматической волны на границу  $x = 0$ . Здесь  $\omega$  – круговая частота,  $k_y$  – проекция волнового вектора на ось  $y$ , а функция  $F_0(k_y, \omega)$  – угловой спектр начального распределения поля.

В дальнейшем будем записывать спектральный оператор (2.9) как  $\hat{F}\{U\}$ .

Если мы зададим угловой спектр  $F(x, k_y, \omega)$  зависимым от продольной координаты  $x$ , то функция  $U(x, y, t)$  будет задаваться

выражением

$$U(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, k_y, \omega) \exp\{i(k_y y - \omega t)\} dk_y d\omega. \quad (2.10)$$

Поскольку значения  $U$  для всех  $x$  должны удовлетворять исходному волновому уравнению (1.7), получим, подставляя (2.10) в (1.7), уравнение для спектра  $F(x, k_y, \omega)$ :

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2 \right) F = 0. \quad (2.11)$$

Решение уравнения (2.11), удовлетворяющее граничному условию  $F(0, k_y, \omega) = F_0(k_y, \omega)$  и условию излучения на бесконечности, имеет следующий вид:

$$F = F_0 \exp \left( ix \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} \right). \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что угловой спектр  $F$  состоит из двух типов волн – однородных и неоднородных. Если значение  $K = \omega^2 / c^2 - \omega_L^2 / c^2 - k_y^2$  под квадратным корнем в правой части уравнения (2.12) положительно, то выражение (2.12) соответствует однородным плоским волнам и  $\sqrt{K}$  – проекция волнового вектора на ось  $x$ . Отрицательные значения  $K$  соответствуют затухающим неоднородным волнам, а  $\sqrt{-K}$  определяет их затухание.

#### § 4. Вектор средней групповой скорости

Рассчитаем все введенные энергетические характеристики, включая вектор средней групповой скорости, в спектральной области. Для этой цели используем теорему Парсеваля [103]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_1 U_2 dy dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1 F_2^* dk_y d\omega. \quad (2.13)$$

Здесь  $U_1$  и  $U_2$  – действительные функции переменных  $y, t$ , а  $F_1$  и  $F_2$  – соответствующие им комплексные спектральные функции переменных  $k_y, \omega$ , "звездочка" означает комплексное сопряжение.

Заметим, что спектр  $F$  действительной функции  $U$  обладает следующими свойствами:

$$F(k_y, \omega) = F^*(-k_y, -\omega);$$

$$F(k_y, -\omega) = F^*(-k_y, \omega).$$

Спектр волновой функции  $U$  представлен формулой (2.12). Используя хорошо известные свойства Фурье-преобразования [24], достаточно просто найти спектры производных  $\partial U / \partial x$ ,  $\partial U / \partial y$ ,  $\partial U / \partial t$ :

$$\hat{F}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} F; \quad (2.14)$$

$$\hat{F}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = ik_y F; \quad (2.15)$$

$$\hat{F}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = -i\omega F. \quad (2.16)$$

Запишем проинтегрированные компоненты вектора потока энергии (1.14) и плотность энергии (1.13) через спектральные функции поля:

$$\begin{aligned} \langle\langle P_x \rangle\rangle &= -c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} dy dt = \\ &= 4\pi^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} FF^* dk_y d\omega; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle P_y \rangle\rangle &= -c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial t} dy dt = \\ &= 4\pi^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_y \omega FF^* dk_y d\omega; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle W \rangle\rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \omega_L^2 U^2 \right\} dy dt = \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 FF^* dk_y d\omega, \end{aligned} \quad (2.19)$$

и перепишем (2.17)–(2.19) через начальный спектр  $F_0$ , используя выражение (2.12) для  $F$ . Далее будет удобно пределы интегрирования разделить на две области  $K \geq 0$  и  $K < 0$ , соответствующие однородным и неоднородным волнам:

$$\begin{aligned} \langle\langle P_x \rangle\rangle &= 4\pi^2 c^2 \iint_{K \geq 0} \omega \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} |F_0|^2 dk_y d\omega + \\ &+ 4\pi^2 i c^2 \iint_{K < 0} \omega \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \times \\ &\times |F_0|^2 \exp\left\{-2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}\right\} dk_y d\omega; \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle P_y \rangle\rangle &= 4\pi^2 c^2 \iint_{K \geq 0} k_y \omega |F_0|^2 dk_y d\omega + \\ &+ 4\pi^2 c^2 \iint_{K < 0} k_y \omega |F_0|^2 \exp\left\{-2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}\right\} dk_y d\omega; \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle W \rangle\rangle &= 4\pi^2 \iint_{K \geq 0} \omega^2 |F_0|^2 dk_y d\omega + \\ &+ 4\pi^2 \iint_{K < 0} \omega^2 |F_0|^2 \exp\left\{-2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}\right\} dk_y d\omega. \end{aligned} \quad (2.19a)$$

Мы видим, что в выражении для  $\langle\langle P_x \rangle\rangle$  (2.17a) присутствует мнимая часть. Однако ее значение равно нулю из-за свойств преобразования Фурье для действительной функции.

Можно упростить написание формул (2.17a)–(2.19a), обозначив интегралы, не зависящие от координаты  $x$ , как константы  $I_i$ , а интегралы, зависящие от  $x$ , как функции  $\alpha_i(x)$ .

Компоненты вектора средней групповой скорости, в общем случае, зависят от продольной координаты  $x$  и выглядят как

$$V_{xga} = \frac{\langle\langle P_x \rangle\rangle}{\langle\langle W \rangle\rangle} = \frac{I_1}{I_3 + \alpha_3(x)}; \quad (2.20)$$

$$V_{yga} = \frac{\langle\langle P_y \rangle\rangle}{\langle\langle W \rangle\rangle} = \frac{I_2 + \alpha_2(x)}{I_3 + \alpha_3(x)}. \quad (2.21)$$



Здесь

$$I_1 = 4\pi^2 c^2 \iint_{K \geq 0} \omega \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} |F_0|^2 dk_y d\omega; \quad (2.20a)$$

$$I_2 = 4\pi^2 c^2 \iint_{K \geq 0} k_y \omega |F_0|^2 dk_y d\omega; \quad (2.21a)$$

$$a_2(x) = 4\pi^2 c^2 \iint_{K < 0} k_y \omega |F_0|^2 \times \\ \times \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega; \quad (2.21b)$$

$$I_3 = 4\pi^2 \iint_{K \geq 0} \omega^2 |F_0|^2 dk_y d\omega; \quad (2.21c)$$

$$a_3(x) = 4\pi^2 \iint_{K < 0} \omega^2 |F_0|^2 \times \\ \times \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega. \quad (2.21d)$$

Функции  $\alpha_i(x)$  всегда стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ ; однако их конкретное поведение, определяемое начальным спектром затухающих волн, может быть существенно различным, включая возможную смену знака на противоположный.

## § 5. Поперечная координата волнового пакета

Для расчета средней поперечной координаты (2.5) необходимо найти спектральную функцию следующего выражения:

$$W_y = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \omega_L^2 U^2 \right\}_y = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \left( y \frac{\partial U}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) + c^2 \left( y \frac{\partial U}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + c^2 \left( y \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \omega_L^2 (yU)U \right\}. \quad (2.22)$$

Для этого найдем спектры функций  $y(\partial U/\partial t)$ ,  $y(\partial U/\partial x)$ ,  $y(\partial U/\partial y)$ ,  $yU$ , используя хорошо известное свойство преобразования Фурье: умножение функции на  $y$  эквивалентно для ее спектра дифференцированию по  $k_y$  и умножению его на  $i$ . При записи спектра мы учтем, что  $F_0 = |F_0| \exp\{i\psi_0\}$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}\left\{y\frac{\partial U}{\partial t}\right\} &= \omega \frac{\partial |F_0|}{\partial k_y} \exp\{\cdot\} + i\omega |F_0| \frac{\partial \psi_0}{\partial k_y} \exp\{\cdot\} - \\ &- i |F_0| k_y \omega x \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \exp\{\cdot\}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}\left\{y\frac{\partial U}{\partial y}\right\} &= -|F_0| \exp\{\cdot\} - k_y \frac{\partial |F_0|}{\partial k_y} \exp\{\cdot\} - ik_y |F_0| \frac{\partial \psi_0}{\partial k_y} \exp\{\cdot\} + \\ &+ ik_y^2 |F_0| x \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \exp\{\cdot\}; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}\left\{y\frac{\partial U}{\partial x}\right\} &= k_y \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} |F_0| \exp\{\cdot\} - \\ &- \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} \frac{\partial |F_0|}{\partial k_y} \exp\{\cdot\} - \\ &- i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} |F_0| \frac{\partial \psi_0}{\partial k_y} \exp\{\cdot\} + ik_y x |F_0| \exp\{\cdot\}; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}\{yU\} &= i \frac{\partial |F_0|}{\partial k_y} \exp\{\cdot\} - |F_0| \frac{\partial \psi_0}{\partial k_y} \exp\{\cdot\} + \\ &+ |F_0| k_y x \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \exp\{\cdot\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

В формулах (2.23)–(2.26) и далее мы ввели для упрощения записи аббревиатуру

$$\{\cdot\} = \left\{ i\psi_0 + ix \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} \right\}.$$

Используя теорему Парсеваля (2.13), а также выражения (2.23)–(2.26) для спектра, числитель формулы (2.5) можно

привести к виду

$$\begin{aligned} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W y d y d t = 4 \pi^2 \iint_{K \geq 0} \left\{ -|F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial k_y} \omega^2 + \right. \\ \left. + |F_0|^2 k_y \omega^2 x \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \right\} d k_y d \omega - \\ - 4 \pi^2 \iint_{K < 0} |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial k_y} \omega^2 \exp \left\{ -2 x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} d k_y d \omega. \end{aligned} \quad (2.27)$$

В формуле (2.27) приведена только действительная часть интеграла, поскольку его мнимая часть для действительных функций равна нулю.

Перепишем (2.27) в более компактной форме:

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W y d y d t = I_4 + I_5 x + \alpha_4(x). \quad (2.27a)$$

Здесь

$$I_4 = -4 \pi^2 \iint_{K \geq 0} |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial k_y} \omega^2 d k_y d \omega; \quad (2.27b)$$

$$I_5 = 4 \pi^2 \iint_{K \geq 0} |F_0|^2 k_y \omega^2 \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} d k_y d \omega; \quad (2.27c)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4(x) = -4 \pi^2 \iint_{K < 0} |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial k_y} \omega^2 \times \\ \times \exp \left\{ -2 x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} d k_y d \omega. \end{aligned} \quad (2.27d)$$

Окончательно зависимость поперечной координаты волнового пакета от  $x$  может быть записана как

$$Y_{ca} = \frac{I_4 + I_5 x + \alpha_4(x)}{I_3 + \alpha_3(x)}. \quad (2.28)$$

## § 6. Время распространения волнового пакета

Преобразуем подынтегральное выражение числителя формулы (2.6)

$$Wt = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \omega_L^2 U^2 \right\} t$$

в вид

$$Wt = \frac{1}{2} \left\{ \left( t \frac{\partial U}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) + c^2 \left( t \frac{\partial U}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + c^2 \left( t \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \omega_L^2 (tU)U \right\}. \quad (2.29)$$

Мы можем рассчитать спектры функций  $t(\partial U/\partial t)$ ,  $t(\partial U/\partial x)$ ,  $t(\partial U/\partial y)$ ,  $tU$ , используя тот факт, что умножение функции на  $t$  в пространственно-временной области эквивалентно дифференцированию ее спектра по  $\omega$  и умножению его на  $(-i)$ .

Из (2.14)–(2.16) получим

$$\hat{F} \left\{ t \frac{\partial U}{\partial t} \right\} = - |F_0| \exp\{\cdot\} - \omega \frac{\partial |F_0|}{\partial \omega} \exp\{\cdot\} - i\omega |F_0| \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \exp\{\cdot\} - \\ - i \frac{\omega^2}{c} |F_0| x \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \exp\{\cdot\}; \quad (2.30)$$

$$\hat{F} \left\{ t \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = k_y \frac{\partial |F_0|}{\partial \omega} \exp\{\cdot\} + i k_y |F_0| \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \exp\{\cdot\} + \\ + i k_y \frac{\omega}{c} |F_0| x \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \exp\{\cdot\}; \quad (2.31)$$

$$\hat{F} \left\{ t \frac{\partial U}{\partial x} \right\} = \frac{\omega}{c} |F_0| \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \exp\{\cdot\} + \\ + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} \frac{\partial |F_0|}{\partial \omega} \exp\{\cdot\} + \\ + i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} - k_y^2} |F_0| \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \exp\{\cdot\} + i \frac{\omega}{c^2} |F_0| x \exp\{\cdot\}; \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}\hat{F}\{tU\} = & -i \frac{\partial |F_0|}{\partial \omega} \exp\{\cdot\} + |F_0| \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \exp\{\cdot\} + \\ & + \frac{\omega}{c} |F_0| x \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \exp\{\cdot\}.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Используя теорему Парсеваля совместно с выражениями для спектров (2.30)–(2.33), преобразуем числитель формулы (2.6) к виду

$$\begin{aligned}\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int W t dy dt = & 4\pi^2 \iint_{K \geq 0} \left\{ \omega^2 |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} |F_0|^2 x \frac{\omega^3}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} \right\} dk_y d\omega + \\ & + 4\pi^2 \iint_{K < 0} \omega^2 |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega,\end{aligned}\quad (2.34)$$

что позволяет записать время распространения пакета как

$$T_{ca} = \frac{I_6 + I_7 x + \alpha_5(x)}{I_3 + \alpha_3(x)}.\quad (2.35)$$

Здесь введены следующие сокращения:

$$I_6 = 4\pi^2 \iint_{K \geq 0} \omega^2 |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} dk_y d\omega;\quad (2.35a)$$

$$I_7 = \frac{4\pi^2}{c} \iint_{K \geq 0} |F_0|^2 \frac{\omega^3}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} dk_y d\omega;\quad (2.35b)$$

$$\begin{aligned}\alpha_5(x) = & 4\pi^2 \iint_{K < 0} \omega^2 |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \times \\ & \times \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega.\end{aligned}\quad (2.35c)$$

В общем случае время распространения волнового пакета  $T_{ca}(x)$  (2.35), как и поперечная координата  $Y_{ca}(x)$  (2.28), зависит от расстояния  $x$  нелинейно из-за наличия в спектре затухающих волн.

## § 7. Ширина и длительность волнового пакета

Используя процедуры, аналогичные описанным выше, можно получить выражения для ширины пакета  $\sigma_{ya}$  (2.7) и его длительности  $\sigma_{ia}$  (2.8):

$$\sigma_{ya}^2 = \frac{I_8 + I_9x + I_{10}x^2}{I_3 + \alpha_3(x)} + \frac{\alpha_6(x) + x\alpha_7(x) + x^2\alpha_8(x)}{I_3 + \alpha_3(x)} - Y_{ca}^2; \quad (2.36)$$

$$\sigma_{ia}^2 = \frac{I_{11} + I_{12}x + I_{13}x^2}{I_3 + \alpha_3(x)} + \frac{\alpha_9(x) + x\alpha_{10}(x) + x^2\alpha_{11}(x)}{I_3 + \alpha_3(x)} - T_{ca}^2. \quad (2.37)$$

Здесь константы  $I_i$  и функции  $\alpha_i(x)$  в (2.36) определены спектром начальных условий на границе  $x = 0$  следующим образом:

$$I_8 = 4\pi^2 \iint_{K \geq 0} \left\{ \omega^2 \left( \frac{\partial |F_0|}{\partial k_y} \right)^2 + \omega^2 |F_0|^2 \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial k_y} \right)^2 + \frac{1}{2} c^2 |F_0|^2 \left( \frac{c^2 k_y^2}{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2} + 1 \right) \right\} dk_y d\omega; \quad (2.36a)$$

$$I_9 = -8\pi^2 \iint_{K \geq 0} k_y \omega^2 |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial k_y} \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} dk_y d\omega; \quad (2.36b)$$

$$I_{10} = 2\pi^2 c^2 \iint_{K \geq 0} k_y^2 |F_0|^2 \left( \frac{\omega^2 + \omega_L^2 + c^2 k_y^2}{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2} + 1 \right) dk_y d\omega; \quad (2.36c)$$

$$\alpha_6(x) = 2\pi^2 \iint_{K < 0} \left\{ c^2 |F_0|^2 + 4c^2 k_y |F_0| \frac{\partial |F_0|}{\partial k_y} + 2(c^2 k_y^2 + \omega_L^2) \left( \frac{\partial |F_0|}{\partial k_y} \right)^2 + 2(c^2 k_y^2 + \omega_L^2) |F_0|^2 \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial k_y} \right)^2 + c^4 k_y^2 |F_0|^2 \frac{1}{c^2 k_y^2 + \omega_L^2 - \omega^2} \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega; \quad (2.36d)$$

$$\alpha_7(x) = -8\pi^2 \iint_{K < 0} \left\{ c^2 k_y^2 |F_0|^2 + k_y |F_0| \frac{\partial |F_0|}{\partial k_y} (c^2 k_y^2 + \omega_L^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega; \quad (2.36e)$$

$$\alpha_8(x) = 2\pi^2 \iint_{K < 0} c^2 k_y^2 |F_0|^2 \left( \frac{c^2 k_y^2 + \omega_L^2 + \omega^2}{c^2 k_y^2 + \omega_L^2 - \omega^2} + 1 \right) \times \\ \times \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega. \quad (2.36f)$$

Значения констант  $I_i$  и функций  $\alpha_i(x)$  в выражении (2.37) для длительности пакета  $\sigma_{ta}$  вычисляются аналогичным путем:

$$I_{11} = 2\pi^2 \iint_{K \geq 0} \left\{ |F_0|^2 + 2\omega^2 \left( \frac{\partial |F_0|}{\partial \omega} \right)^2 + 4\omega |F_0| \frac{\partial |F_0|}{\partial \omega} + \right. \\ \left. + 2\omega^2 |F_0|^2 \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \right)^2 + \omega^2 |F_0|^2 \frac{1}{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2} \right\} dk_y d\omega; \quad (2.37a)$$

$$I_{12} = \frac{8\pi^2}{c} \iint_{K \geq 0} |F_0|^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \frac{\omega^3}{\sqrt{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2}} dk_y d\omega; \quad (2.37b)$$

$$I_{13} = \frac{2\pi^2}{c^2} \iint_{K \geq 0} \omega^2 |F_0|^2 \left( \frac{\omega^2 + \omega_L^2 + c^2 k_y^2}{\omega^2 - \omega_L^2 - c^2 k_y^2} + 1 \right) dk_y d\omega; \quad (2.37c)$$

$$\alpha_9(x) = 2\pi^2 \iint_{K < 0} \left\{ |F_0|^2 + 2(c^2 k_y^2 + \omega_L^2) \left[ \left( \frac{\partial |F_0|}{\partial \omega} \right)^2 + |F_0|^2 \left( \frac{\partial \Psi_0}{\partial \omega} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \omega^2 |F_0|^2 \frac{1}{c^2 k_y^2 + \omega_L^2 - \omega^2} \right\} \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega; \quad (2.37d)$$

$$\alpha_{10}(x) = \frac{4\pi^2}{c^2} \iint_{K < 0} \omega |F_0| \frac{\partial |F_0|}{\partial \omega} (c^2 k_y^2 + \omega_L^2) \times \\ \times \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega; \quad (2.37e)$$

$$\alpha_{11}(x) = \frac{2\pi^2}{c^2} \iint_{K < 0} \omega^2 |F_0|^2 \left( \frac{c^2 k_y^2 + \omega_L^2 + \omega^2}{c^2 k_y^2 + \omega_L^2 - \omega^2} + 1 \right) \times \\ \times \exp \left\{ -2x \sqrt{k_y^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} dk_y d\omega. \quad (2.37f)$$

Формулы (2.36a)–(2.36f) и (2.37a)–(2.37f) довольно громоздки. Но польза их в том, что они являются точными выражениями для произвольных граничных условий и представляют результат в общем виде. Кроме того, в большинстве практических случаев, например при симметричных угловых спектрах, они существенно упрощаются.

## § 8. Волновые пакеты в бездисперсных и диспергирующих средах

Из формул (2.20), (2.21) и (2.28) следует, что движение волнового пакета в однородном полупространстве в общем случае не является ни равномерным, ни прямолинейным. Отклонение от равномерного и прямолинейного движения можно наблюдать как в диспергирующей, так и в бездисперсной среде. В рамках спектрального подхода, который мы использовали, этот эффект проявляется из-за наличия неоднородных затухающих волн в двумерном спектре волнового пакета.

Неоднородные волны всегда присутствуют в спектре любого волнового пакета, ограниченного по поперечной координате  $y$ . В бездисперсной среде эти волны описывают чисто дифракционные эффекты. Присутствие частотной дисперсии значительно усложняет механизм распространения волн, но некоторые частные случаи могут быть успешно описаны в рамках общей дифракционной теории.

Например, в монохроматической задаче частотная дисперсия среды приводит к изменению длины волны (к изменению фазовой скорости), что достаточно очевидно из анализа волновых уравнений, приведенных в главе 1. Линейные волновые уравнения как с дисперсией (1.1), (1.2), так и без дисперсии (1.6) для моно-



хроматической волновой функции эквивалентны уравнению Гельмгольца с диэлектрической проницаемостью (1.5). Однако это не значит, что все приближенные подходы к решению волновых уравнений в монохроматической задаче для бездисперсных сред могут быть использованы в диспергирующих средах. Например, некогда очень популярный вариант лучевого приближения, получаемый как асимптотика при  $k \rightarrow \infty$ , справедлив только для бездисперсных сред [11]. Если этот метод вывода лучевых уравнений перенести на ионосферу, получим парадоксальный результат – рефракция в ионосфере вообще отсутствует.

Если волна не монохроматическая, то дифракционная теория не может быть использована, поскольку не способна адекватно описать все детали процесса распространения, например она не описывает существование предвестника [1, 17].

Однако дисперсия и дифракция по своей физической природе более близки, чем это может показаться на первый взгляд, поскольку могут приводить к похожим эффектам (об этом мы уже говорили в главе 1).

Тем не менее в общем случае дифракционные и дисперсионные эффекты имеют разные пространственные и временные масштабы. Это происходит, во-первых, из-за перераспределения энергии между однородными и неоднородными волнами. При наличии дисперсии доля неоднородных волн возрастает с ростом частоты  $\omega_L$ . При  $\omega_L \geq \omega$  в спектре остаются только неоднородные волны. Во-вторых, перераспределяется вклад различных частотных компонент в результирующую траекторию и в вектор средней групповой скорости.

В бездисперсной среде масштаб эффектов соизмерим с размерами самого волнового пакета, в то время как в диспергирующей среде пространственные и временные масштабы эффектов определяются собственной частотой среды  $\omega_L$  и могут существенно превосходить первоначальные размеры пакета.

На больших расстояниях от границы движение волнового пакета определяется однородными волнами в спектре граничных условий. С уменьшением вклада неоднородных волн движение пакета асимптотически стремится к равномерному и прямолинейному. Вектор средней групповой скорости в дальней зоне не меняется, а его компоненты определяются из (2.20), (2.21) как

$$V_{xga} = \frac{I_1}{I_5};$$

$$V_{yga} = \frac{I_2}{I_5}.$$

Асимптотически для  $x \rightarrow \infty$  поперечная координата (если  $I_9 \neq 0$ ) растет линейно, что следует из (2.28):

$$Y_{ca} = \frac{I_8 + I_9 x}{I_5}.$$

Наоборот, на начальной стадии направление движения волнового пакета определяется совместно как однородными, так и неоднородными волнами. Здесь движение пакета может быть существенно неравномерным. Вектор средней групповой скорости (2.20), (2.21) меняет свое направление, когда интеграл  $\alpha_2(x)$  (2.21b) отличается от нуля. Это условие выполняется при асимметрии углового спектра в области неоднородных волн ( $K < 0$ ):

$$|F_0(-k_y, \omega)|^2 \neq |F_0(k_y, \omega)|^2.$$

Формула (2.28) описывает криволинейное распространение волнового пакета в ближней зоне, если:

- 1)  $I_5 = 0$  и  $I_4/I_3 \neq \alpha_4/\alpha_3$  или
- 2)  $I_5 \neq 0$  и  $\alpha_3 \neq 0$ .

Эти условия выполняются, когда угловой спектр асимметричен в области однородных волн ( $K \geq 0$ ) (при наличии неоднородных волн):

$$|F_0|^2(-k_y, \omega) \neq |F_0|^2(k_y, \omega),$$

или когда произведение  $\partial\psi/\partial k_y |F_0|^2$  асимметрично для затухающих волн ( $K < 0$ ):

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial k_y}(-k_y, \omega) |F_0|^2(-k_y, \omega) \neq \frac{\partial\psi_0}{\partial k_y}(k_y, \omega) |F_0|^2(k_y, \omega).$$

Итак, криволинейное движение волнового пакета в однородной среде возникает при асимметрии углового спектра граничных условий. В процессе распространения "навязанная" границей структура постепенно симметризуется и боковой сдвиг исчезает.

На первый взгляд полученные нами результаты полностью противоречат большинству работ (например, [19, 21]), в которых утверждается, что в однородной диспергирующей или бездисперсной среде энергетический центр волнового пакета движется равномерно и прямолинейно.

Это кажущееся противоречие снимается при внимательном прочтении теоремы Нетер, в которой говорится о сохранении моментов поля при инвариантности Лагранжиана к сдвигу и

повороту [49, 78, 82, 83]. Такая математическая абстракция асимптотически справедлива для областей пространства, в которых волновой пакет перестает "чувствовать" источник или границу, которые его породили. На спектральном языке это означает отсутствие в угловом спектре неоднородных волн.

В данной главе мы рассмотрели более общую задачу с границей, наличие которой нарушает инвариантность системы к сдвигу и повороту. В дальней зоне наши результаты, естественно, совпадают с классическими результатами, полученными в теореме Нетер.

Некоторым механическим аналогом управляемого криволинейного движения в однородной среде (воздухе) может служить закручивание мяча, хорошо известное футболистам и теннисистам. Например, известный любителям футбола удар "сухой лист" позволяет направить крученный мяч с угловой площадки непосредственно в створ ворот.

Еще раз подчеркнем, что необходимым условием непрямолинейного распространения является наличие неоднородных (затухающих) волн в угловом спектре пакета.

При выборе соответствующего спектра и, соответственно, пространственного и временного распределения поля на границе можно произвольно задать начальное и конечное направления движения волнового пакета. Образцом такого движущегося по криволинейной траектории пакета может служить квазимонохроматический пакет с поперечной частотной модуляцией.

Чтобы лучше понять смысл поперечной частотной модуляции и поперечного сдвига пакета за счет частотной дисперсии, сравним результаты численного расчета его распространения в однородной трехмерной среде при наличии и отсутствии частотной дисперсии.

Волновое поле в полупространстве  $x \geq 0$  получим численными методами на основе интегрального представления [106]:

$$U(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y - \eta, z - \xi, t - \tau) U(0, \eta, \xi, \tau) d\eta d\xi d\tau.$$

Здесь

$$g(x, y, z, t) = \frac{\delta(t - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / c)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\omega_L}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) / c^2}} J_1\left(\omega_L \sqrt{t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) / c^2}\right)$$

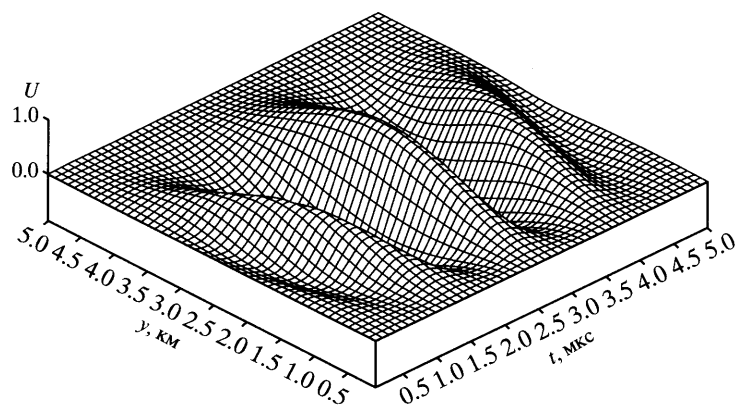


Рис. 1. Функция поля  $U(t, y)$  на границе  $x = 0$

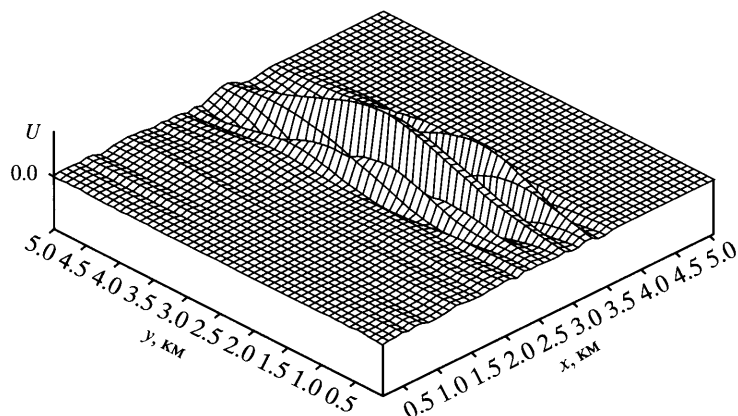
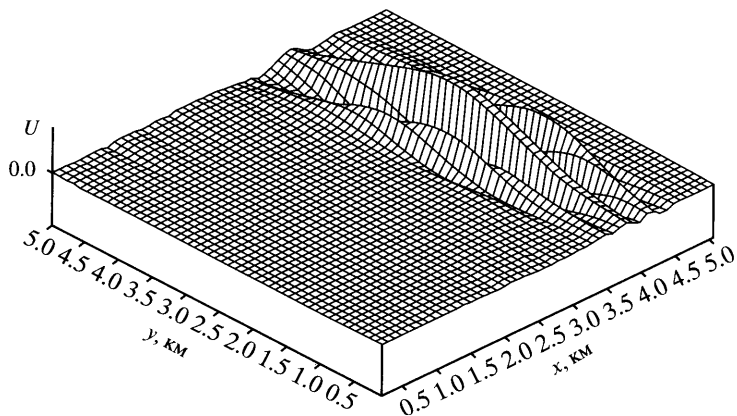


Рис. 2. Функция поля  $U(x, y)$  в бездисперсной среде,  $t = 12$  мкс

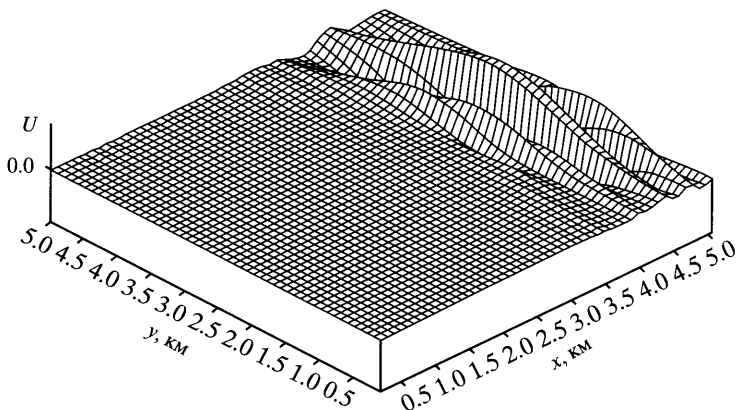
– функция Грина для уравнения (1.7) в области  $t^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)/c^2$ . Вне этой области  $g(x, y, z, t) = 0$ .

С целью уменьшения количества переменных, а также с целью упрощения восприятия результатов мы выбрали специальный тип граничных условий, локализованных в плоскости  $z = 0$ :  $U(0, y, z, t) = U(y, t)\delta(z)$ .

Вариант функции поля  $U(y, t)$  на границе, задающей пакет с поперечной частотной модуляцией, приведен на рис. 1. Выбор такой функции, имеющей всего несколько осцилляций, объясняется желанием наглядно продемонстрировать различие поведения волнового пакета в процессе распространения в однородной среде без дисперсии и с частотной дисперсией.



**Рис. 3.** Функция поля  $U(x, y)$  в бездисперсной среде,  $t = 15$  мкс



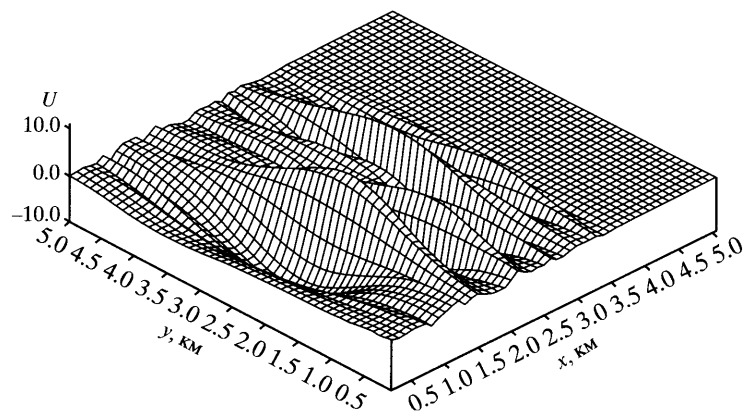
**Рис. 4.** Функция поля  $U(x, y)$  в бездисперсной среде,  $t = 18$  мкс

Центральная частота этой широкополосной волновой функции меняется линейно от 0.5 (при  $y = 5.0$  км) до 1 МГц (при  $y = 0$  км).

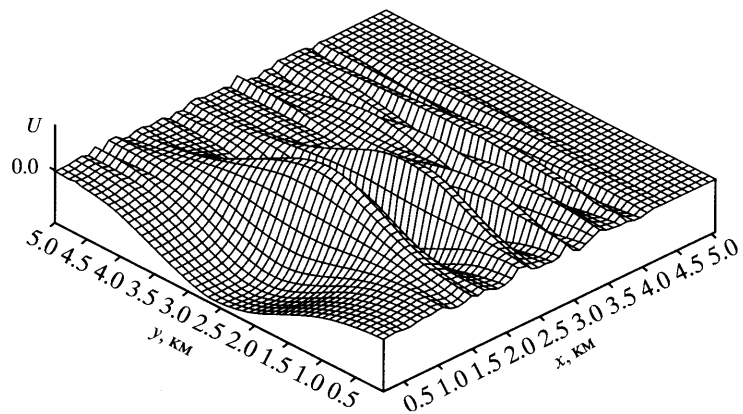
Для упрощения визуализации зададим  $z = 0$  и представим ряд распределений функции поля  $U(x, y, 0, t)$  в плоскости  $(x, y)$  для различных моментов времени  $t$ .

На рис. 2–4 показано распределение поля в бездисперсной среде ( $\omega_L = 0$ ) для моментов времени  $t = 12, 15, 18$  мкс. Из этих распределений следует, что в однородной бездисперсной среде волновой пакет движется по линейной траектории со скоростью  $c$  без видимого изменения своей формы.

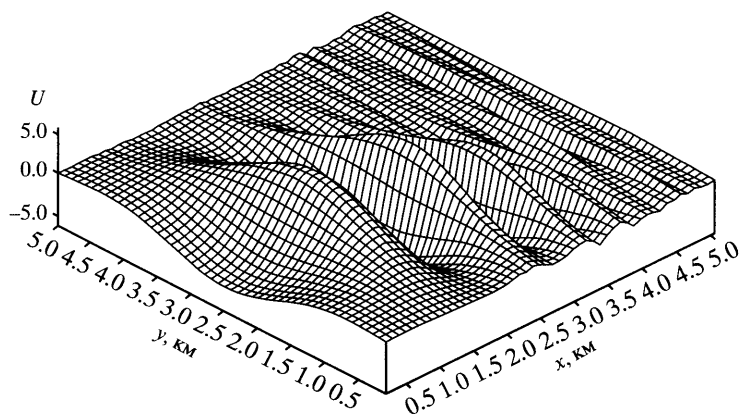
На рис. 5–9 показано аналогичное распределение поля в однородной среде с частотной дисперсией при  $f_L = 0.6$  МГц



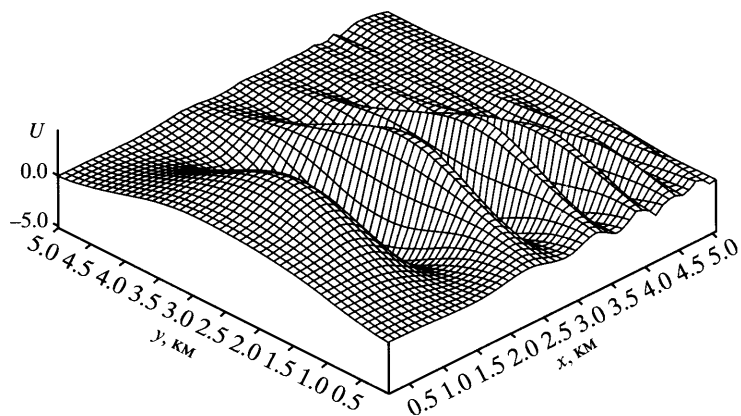
**Рис. 5.** Функция поля  $U(x, y)$  в диспергирующей среде,  $t = 12$  мкс



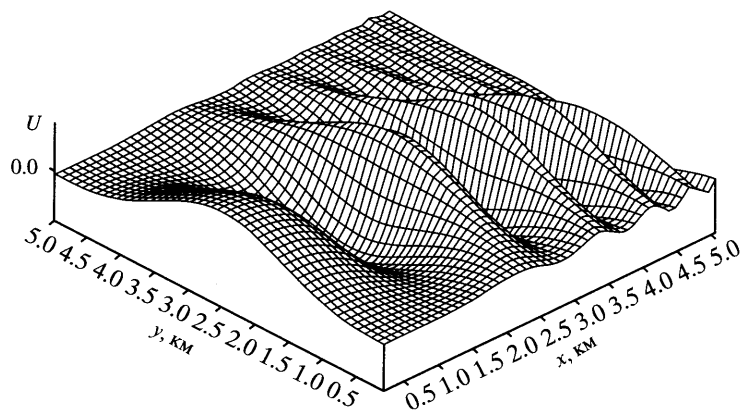
**Рис. 6.** Функция поля  $U(x, y)$  в диспергирующей среде,  $t = 15$  мкс



**Рис. 7.** Функция поля  $U(x, y)$  в диспергирующей среде,  $t = 18$  мкс



**Рис. 8.** Функция поля  $U(x, y)$  в диспергирующей среде,  $t = 21$  мкс



**Рис. 9.** Функция поля  $U(x, y)$  в диспергирующей среде,  $t = 24$  мкс

( $f_L = \omega_L/2\pi$ ) для моментов времени  $t = 12, 15, 18, 21, 24$  мкс. На рис. 5–7 можно наблюдать формирование и распространение предвестника со скоростью  $c$ .

Основное тело волнового пакета испытывает дисперсионные искажения своей формы, проявляющиеся в продольном растяжении, а также в видимом смещении его вправо. Это указывает на криволинейное движение энергетического центра пакета.

## § 9. Обсуждение результатов

Мы рассмотрели задачу распространения волновых пакетов в однородном полупространстве с частотной дисперсией, задаваемой уравнением Клейна–Гордона (1.7), и получили точные аналитические выражения для их интегральных энергетических

характеристик: вектора средней групповой скорости (2.4), поперечной координаты (2.5), времени распространения (2.6), ширины (2.7) и длительности (2.8) пакета.

Эти выражения получены в общем виде для произвольных начальных условий  $U(0, y, t)$  на границе  $x = 0$ .

Мы выяснили, что частотная дисперсия среды при определенных условиях может приводить к изменению направления движения волнового пакета в однородной среде. Этот эффект происходит на фоне дифракционных явлений, которые также могут внести свой вклад в поперечный сдвиг пакета. Однако пространственные и временные масштабы этих явлений различны, что позволяет их разделять.

Рассмотренный эффект поперечного сдвига пакета из-за частотной дисперсии среды и эффект дисперсионной рефракции, о котором мы говорили в Предисловии, имеют одну физическую природу, определяемую нелинейной зависимостью волнового числа  $k$  от частоты  $\omega$  в дисперсионном уравнении.

Однако поперечный сдвиг пакета является достаточным, но не необходимым условием существования эффекта дисперсионной рефракции, который имеет локальный (геометрооптический) характер. Из общих соображений понятно, что изменение направления движения отдельных участков пакета не всегда приводит к изменению движения его энергетического центра, т.е. пакета в целом.

Здесь та же ситуация, что и в механическом аналоге движения ракеты в безвоздушном пространстве: ракета может совершать сколь угодно сложные маневры, но центр масс ракеты и израсходованного топлива останется на месте (или будет двигаться равномерно и прямолинейно).